Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
обучающимся
по организации самостоятельной
подготовки к ЕГЭ 2023 года

МАТЕМАТИКА

Профильный уровень

Москва, 2023

Авторы-составители: И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий, М.А. Черняева

Методические рекомендации предназначены для обучающихся 11 классов, планирующих сдавать ЕГЭ 2023 г. по математике профильного уровня. Методические рекомендации содержат советы разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ и полезную информацию для организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ. В рекомендациях указаны темы, на освоение/повторение которых целесообразно обратить особое внимание.

Содержание

Рекомендации по выполнению заданий части 1 экзаменационной работы 3

Рекомендации по выполнению заданий части 2 экзаменационной работы 10

Дорогие друзья!

Скоро вам предстоит сдать единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике профильного уровня. Ваша основная задача – получить возможность поступить в выбранный вами вуз благодаря хорошей математической подготовке. Подготовка окажется эффективной, если вы будете систематически заниматься. Данные рекомендации помогут вам в подготовке к экзамену.

КИМ ЕГЭ 2023 г. по математике профильного уровня состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Все линии заданий преемственны по отношению к предыдущей экзаменационной модели. Отметим особенности заданий, требующие повышенного внимания при подготовке к экзамену.

Рекомендации по выполнению заданий части 1 экзаменационной работы

Часть 1 содержит 6 заданий с кратким ответом базового уровня сложности и 5 заданий с кратким ответом повышенного уровня сложности, в которых ответ необходимо записать в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Они проверяют вычислительные и логические умения и практические навыки применения математических знаний в повседневных ситуациях, в том числе умения использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В часть 1 работы включены задания по всем основным разделам курса математики: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

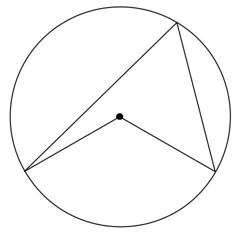
Задания **линий 1** и **2** проверяют умение решать геометрические задачи, наиболее трудные для выпускников. Ниже приведены примеры задания базового уровня линии 1 и задания повышенного уровня линии 2.

1

Пример 1

Найдите величину центрального угла, если он на 69° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 138.

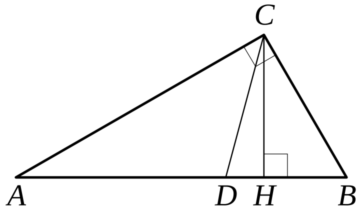


Много выпускников не дали ответ. Для получения ответа нужно было знать только один факт: центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу.

Пример 2

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 75°. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 30.

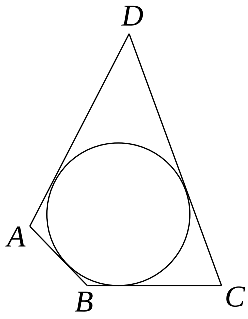


Распространённый неверный ответ – «15°». Его дали участники, которые вписали в поле ответа промежуточный результат или по какой-то причине решили, что искомый угол равен углу A.

Пример 3

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 10$ и $CD = 37$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

Ответ: 35.



Неправильный ответ «29» мог получиться как разность известных противоположных сторон: 37 – 8. В подобных геометрических заданиях базового уровня не следует полагаться на очевидность. Начинать решение нужно с формулирования утверждения: «Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы длин противоположных сторон равны», а затем выписать соотношение в том виде, в котором оно повторяет геометрический факт: $AD + BC = AB + CD$. В таком случае запись способствует выработке понимания геометрического факта и его запоминанию.

Пример 4

В ромбе $ABCD$ угол CDA равен $78°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 51.

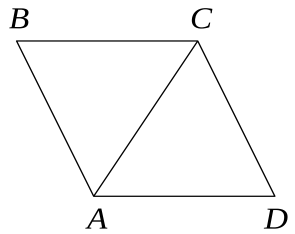
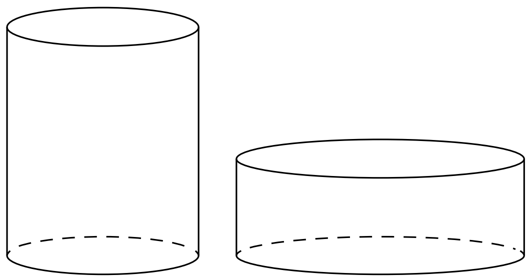


Рисунок в геометрической задаче нужно воспринимать как изображение взаимного расположения элементов, но нельзя относиться к нему как к чертежу, где соблюдены все размеры. При подготовке к экзамену можно самим сделать рисунок к задаче и уже с использованием этого рисунка решать задачу. Работа с новым рисунком позволит исключить ошибку, связанную с невнимательностью или приписыванием данной фигуре несуществующего свойства, например, что треугольник ABC равносторонний.

2 Пример 5

Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 18. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

Ответ: 24.

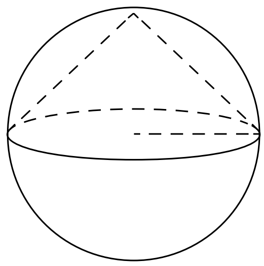


Распространённая ошибка связана с использованием коэффициента в формуле объёма цилиндра без понимания стереометрической конфигурации. Более четверти участников экзамена дали неверный ответ «12» – провели умножение на 2/3, а не на 4/3, так как не учли, что если радиус вдвое больше, то площадь основания больше вчетверо.

Пример 6

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 24. Найдите объём шара.

Ответ: 96.



Распространённая ошибка связана с использованием коэффициента в формуле объёма конуса без понимания стереометрической конфигурации.

Задания **линий 3** и **4** проверяют сформированность умения находить вероятность события. Ниже приведены примеры задания базового уровня линии 3 и задания повышенного уровня линии 4.

3

Пример 7

В сборнике билетов по физике 20 билетов, в двух из них встречается вопрос по теме «Термодинамика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Термодинамика».
Ответ: 0,9.

Типичная ошибка связана с невнимательным чтением условия. Вместо того чтобы найти вероятность «не достанется вопрос», экзаменуемые находили вероятность противоположного события «достанется вопрос».

Пример 8

В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из Японии, 13 из Китая, остальные из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.
Ответ: 0,3.

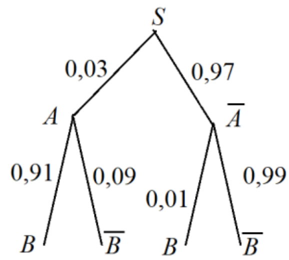
При решении задач на поиск вероятности в опытах с равновозможными исходами распространённая ошибка – попытка использовать в вычислениях порядковый номер выступления спортсменки.

4

Пример 9

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,91. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Здесь лучше изобразить полное дерево, в котором отражены события A «батарейка неисправна» и B «батарейка забракована системой контроля», что не одно и то же. Дерево получается такое, как на рисунке.



Искомая вероятность складывается из вероятностей цепей SAB и $S\overline{A}B$ и равна

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(SAB) + \mathrm{P}(S\overline{A}B) = 0,03 \cdot 0,91 + 0,97 \cdot 0,01 = 0,037.$$

Ответ: 0,037.

Пример 10

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.
Ответ: 0,0576.

В данной задаче дерево сводится к одной цепи, поскольку нас интересует только одно элементарное событие – два успеха и две неудачи подряд. Ненужные ветви дерева можно не изображать.

Пример 11

В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,2. Вероятность того, что в то же время чай закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что чай закончится

одновременно в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется и в первом, и во втором автомате.
Ответ: 0,78.

Пример 12

Игральную кость бросили дважды. Известно, что пять очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков равна 7».
Ответ: 0,16.

Среди заданий базового уровня традиционно вызывают затруднения задания **линии 5** на решение иррациональных, показательных, логарифмических уравнений.

5

Пример 13

Найдите корень уравнения $3^{x+2}=81$.
Ответ: 2.

Пример 14

Найдите корень уравнения $4^{x-3}=64$.
Ответ: 6.

Как правило, ошибки связаны с действиями со степенями, с представлением числа в виде степени, решением линейных и квадратных уравнений, вычислениями. Поэтому необходимо обратить внимание на математическую подготовку и проверять правильность преобразований и вычислений даже в простых заданиях. Найденный корень целесообразно проверить подстановкой в уравнение.

Решение заданий базового уровня **линии 6** на нахождение значений иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических выражений также зачастую представляет сложность. Ниже приведены примеры заданий этой линии.

6

Пример 15

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_8 81}{\log_8 3}$.

Ответ: 4.

Задание проверяет сформированность умения применять свойства логарифма при нахождении значения логарифмического выражения. «Сокращение логарифмов» – типичная ошибка, обусловленная недостаточностью практики работы с логарифмами.

Пример 16

Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 94^\circ}{\sin 47^\circ \cdot \sin 43^\circ}$.

Ответ: 16.

Задание проверяет сформированность умения применять свойства тригонометрических функций – формулы приведения, основное тригонометрическое тождество, формулы двойного аргумента. Типичная ошибкой при выполнении таких заданий – ошибка в применении формул, в частности «потеря» множителя 2 в формуле синуса удвоенного аргумента.

Пример 17

Найдите значение выражения $6\sqrt{3}\cos^2\frac{11\pi}{12}-3\sqrt{3}$.

Ответ: –4,5.

Задание выполнили меньше половины участников ЕГЭ. Многие участники экзамена не дали никакого ответа, наиболее распространённые неверные ответы – «3» и «1,5» получены при неаккуратном обращении с множителями, возникающими после применения формулы косинуса двойного аргумента.

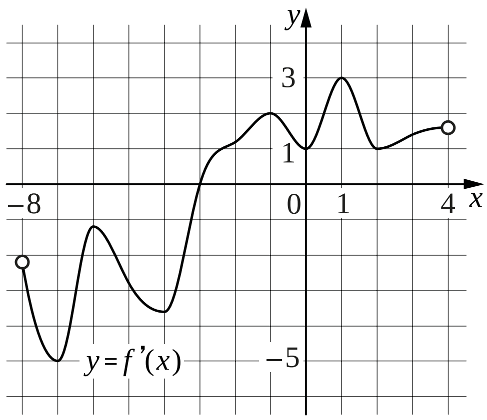
Задания **линии 7** проверяют умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать геометрический смысл производной функции в точке, правила нахождения производных и производные элементарных функций, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком её производной, по графику производной функции охарактеризовать свойства самой функции. Ниже приведены примеры заданий этой линии.

7

Пример 18

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (–8; 4). В какой точке отрезка [–7; –4] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Ответ: –4.

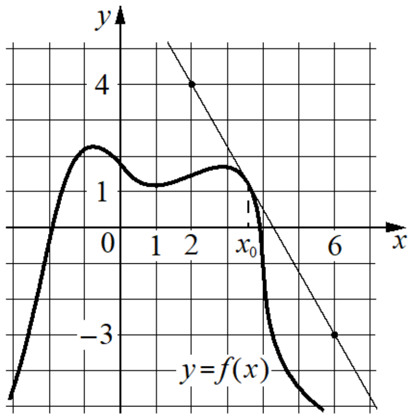


Проблемы у выпускников возникают из-за невнимательного чтения условия задачи и непонимания связи свойств функции с её производной. Типичным неверным ответом является число –7. Получение неверного ответа связано с тем, что выпускники путали график функции с графиком её производной.

Пример 19

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Ответ: –1,75.



Типичный неверный ответ – «1,75» («потерян» минус). Такая ошибка возникает у тех, кто механически воспроизводит алгоритм поиска производной с помощью прямоугольного треугольника, но не обращает внимания на направление касательной. При выполнении таких заданий нужно разбить решение задачи на два этапа: первый этап – определение знака; второй этап – определение модуля производной.

Существенные затруднения вызывают задания, связанные с вычислением по формуле. Задания **линии 8** проверяют сформированность умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Пример такого задания приведён ниже.

8

Пример 20

В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой R_1 = Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого – R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R вычисляется по формуле $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 36 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя. Ответ дайте в омах.
Ответ: 108.

Для выполнения этого задания нужно уметь выразить одну из величин через другие, когда все величины связаны известной формулой, т.е. требуется решить простейшее уравнение или неравенство. Затруднения у выпускников возникают на стадии чтения условия задачи или при подстановке данных в формулу. Часть выпускников не справляется с вычислениями.

Пример 21
Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа v (в м/с) вычисляется по формуле $v=c\cdot\dfrac{f-f_0}{f+f_0}$, где c = 1500 м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого от дна сигнала (в МГц), регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала, если скорость погружения батискафа равна 18 м/с. Ответ дайте в МГц.
Ответ: 506.

Для выполнения этого задания нужно уметь выразить одну из величин через другие, когда все величины связаны известной формулой, т.е. требуется решить простейшее рациональное уравнение.

Пример 22
В ходе распада радиоактивного изотопа его масса (в мг) уменьшается по закону $m=m_0\cdot 2^{-\frac{\tau}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа (в мг), τ – время, прошедшее от начального момента (в мин.), T — период полураспада (в мин.). В начальный момент времени масса изотопа равна 116 мг. Период его полураспада составляет 9 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 29 мг.
Ответ: 18.

Для выполнения этого задания нужно уметь выразить одну из величин через другие, когда все величины связаны известной формулой, т.е. требуется решить простейшее показательное уравнение. Значительно упрощает получение ответа понимание смысла понятия «период полураспада радиоактивного вещества».

Приведём примеры заданий **линии 9** на проверку сформированности умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

9

Пример 23
На изготовление 384 деталей первый рабочий тратит на 8 ч меньше, чем второй рабочий на изготовление 480 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?
Ответ: 24.

Пример 24
Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
Ответ: 63.

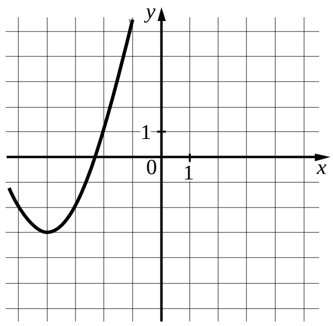
Пример 25
Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью, на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 ч. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.
Ответ: 16.

Для решения задачи нужно уметь составлять уравнение по её условию, решать уравнение и верно интерпретировать результаты его решения. Неверный ответ в таких задачах обычно оказывается ответом на другой вопрос: в примере 23 массовый неверный ответ – производительность труда второго рабочего, а в примере 25 – скорость на пути из A в B. Обязательно следует проверять полученный ответ «на здравый смысл». В примере 25 нужно вычислить скорость, которая на 8 км/ч выше вчерашней; ответ «8» неверен, потому что это означало бы, что вчера велосипедист ехал со скоростью 0 км/ч.

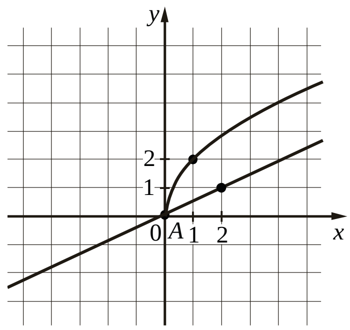
Линия 10 – задания повышенного уровня сложности с кратким ответом интегрированного характера, для выполнения которых необходимо привлекать знания из разных разделов курса математики: элементарные функции; решение линейных, квадратных, иррациональных, рациональных, логарифмических, показательных уравнений и их систем. Ниже приведены примеры заданий линии 10.

10

Пример 26
На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c целые. Найдите значение $f(-12)$.
Ответ: 61.



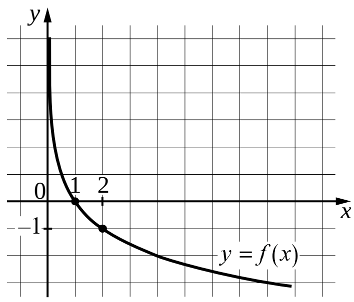
Пример 27
На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.
Ответ: 16.



Пример 28

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(32)$.

Ответ: –5.



Задания **линии 11** проверяют умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать геометрический смысл производной функции в точке, правила нахождения производных и производные элементарных функций, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком её производной, уметь находить точки экстремума функции. Ниже приведены примеры заданий этой линии.

11

<u>Пример 29</u>

Найдите точку максимума функции $y = 7 \cdot \ln(x-9) - 7x + 2$.

Ответ: 10.

<u>Пример 30</u>

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 147x + 19$.

Ответ: 7.

При нахождении точки максимума функции нужно найти производную функции; приравняв производную к нулю, решить простейшее дробное рациональное (в примере 29) или квадратное (в примере 30) уравнения; продолжить исследование, чтобы найти точку максимума.

Рекомендации по выполнению заданий части 2 экзаменационной работы

В части 2 КИМ предлагается 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности. Используя демонстрационный вариант, необходимо изучить критерии оценивания этих заданий, особенно требования к полному верному ответу.

Задания **линий 12**, **14** и **15** относятся к алгебраическим заданиям с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности.

В заданиях линии 12 нужно решить тригонометрическое, или логарифмическое, или показательное уравнение и отобрать корни, принадлежащие числовому отрезку.

12

<u>Пример 31</u>

а) Решите уравнение $2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos 2x + \sin x = \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; -3π; -2π.

<u>Пример 32</u>

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{19\pi}{6}$.

Большинство выпускников, приступающих к решению этой задачи, верно выполняют преобразования с использованием функций удвоенного аргумента, формул приведения, реже – формул суммы или разности тригонометрических функций, без которых, кстати, всегда можно обойтись. В результате всех преобразований уравнение приводится к совокупности простейших тригонометрических уравнений.

Отбор корней с помощью числовой окружности не представляет трудностей, если участник экзамена понимает, где на окружности находятся найденные им серии решений и отрезок (дуга), на котором лежат корни. При отборе корней с помощью тригонометрической окружности на ней должны быть: начало и конец дуги (отмечены и подписаны на окружности); выделение (любым способом) рассматриваемой дуги; корни (отмечены и подписаны на окружности), принадлежащие этой дуге; при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие ей.

В заданиях линии 14 нужно решить рациональное, логарифмическое или показательное неравенства.

14

Пример 33

Решите неравенство $\left(25^x-4\cdot5^x\right)^2+8\cdot5^x<2\cdot25^x+15$.

Ответ: $(-\infty;0)$; $(\log_5 3;1)$.

Пример 34

Решите неравенство $3^x+\dfrac{243}{3^x-36}\geq 0$.

Ответ: $[2;3]$; $(\log_3 36;+\infty)$.

Трудности при решении этой задачи возникали у тех, кто не увидел подходящую замену переменных для разложения на множители. При решении неравенств такого типа выпускники делают ошибки не при решении показательных неравенств, а при решении алгебраического неравенства и выполнении алгоритма метода интервалов.

Задания линии 15 проверяют сформированность умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этих заданий нужно уметь решать текстовую задачу с экономическим содержанием.

15

Пример 35

15 января 2025 г. планируется взять кредит в банке на сумму 1200 тыс. рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й (с февраля по ноябрь 2025 г. включительно) долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15 ноября 2025 г. долг составит 400 тыс. рублей;
– 15 декабря 2025 г. кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Ответ: 1288 тыс. рублей.

Пример 36

В июле 2026 г. планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– платежи в 2027 и в 2028 гг. должны быть по 300 тыс. рублей;
– к июлю 2029 г. долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 г. будет равен 417,6 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Ответ: 700 тыс. рублей.

Основную сложность в данной задаче представляет перевод условия на математический язык. Участники экзамена, аккуратно разобравшиеся в условии, как правило, верно составляли арифметическую модель последовательности платежей и выясняли, что она является арифметической прогрессией. Далее важно избежать вычислительных ошибок.

Задания **линий 13** и **16** относятся к геометрическим заданиям с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности. Эти задания верно решают в основном те, кто претендует на высокий балл.

Задание 13 проверяет сформированность наглядных представлений об изученных стереометрических фигурах, а также умения строить сечения, проводить доказательства, пользуясь изученными фактами о взаимном расположении прямых и плоскостей, находить геометрические величины, пользуясь теоремами об объёмах и площадях поверхности геометрических тел.

13

Пример 37

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 14, высота SH равна 24. Точка K – середина бокового ребра SD а точка N – середина ребра CD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости SAB.

Ответ: б) 6,72.

Пример 38

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N – середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Задание разбито на два пункта. Первый пункт считается выполненным, если приведено верное доказательство. Второй пункт считается выполненным, если обоснованно получен верный ответ. Важно отметить, что, выполняя задание, можно использовать утверждение пункта *а* при решении пункта *б*.

Задание 16 – планиметрическая задача, проверяющая умения пользоваться изученными геометрическими фактами и теоремами, исследовать геометрические конфигурации на плоскости.

16

Пример 39

Трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N. Найдите AD, если радиус окружности равен 12, $\angle BAC = 30°$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH.

Ответ: б) $4\sqrt{33}$.

Пример 40

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M, такая, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60°$.

Ответ: б) $\dfrac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{10}$.

Планиметрические задачи традиционно входили в состав вступительных испытаний технических и математических специальностей вузов. Первый пункт считается выполненным, если приведено верное доказательство. Второй пункт считается выполненным, если обоснованно получен верный ответ. Важно отметить, что, выполняя задание, можно использовать утверждение пункта *а* при решении пункта *б*.

Задания **линий 17** и **18** относятся к алгебраическим заданиям с развёрнутым ответом высокого уровня сложности.

Задания линии 17 проверяют сформированность умений применять математические знания, исследовать уравнения и функции, их графики и взаимное расположение алгебраически заданных кривых.

17

Пример 41

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2 - a^2\right| = |x + a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a}$ имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a = -1$; $0 \le a < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < a < 3$.

Пример 42

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2 + a^2 - 6x - 4a\right| = 2x + 2a$ имеет четыре различных корня.

Ответ: $1 - \sqrt{5} < a < -1$; $0 < a < 1 + \sqrt{5}$.

Задача даёт возможность участнику экзамена, претендующему на поступление в вуз с высокими требованиями к уровню математической подготовки, показать умение верно проводить рассуждения, проверки, преобразования. Поэтому за задачу берутся в основном выпускники с высоким уровнем подготовки. Навыки, необходимые для верного выполнения данного задания, формируются на протяжении многих лет обучения математике.

Задания линии 18 проверяют способность находить пути решения, комбинируя известные методы и алгоритмы. Их особенность состоит в том, что практически все задания этой линии апеллируют к целочисленной арифметике, причём к фактам, известным из курса математики 5–7 классов.

18

Пример 43

Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 34?
б) Может ли это отношение быть равным 84?
в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 4?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Пример 44

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?
в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

Ответ: а) да; б) нет; в) 51.

Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас подтверждения или опровержения гипотез. Верное выполнение всего задания даёт возможность продемонстрировать готовность к продолжению образования в ведущих вузах. При этом первый пункт задачи имеет конструктивный характер и доступен многим участникам экзамена. Важно, что для выполнения первого пункта не требуется специальных знаний – достаточно сообразительности и терпения, чтобы обнаружить нужную математическую конструкцию.

На экзамене по математике разрешается пользоваться только теми справочными материалами, которые находятся в работе (пять тригонометрических формул сразу после инструкции по выполнению работы). При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой. Калькулятор на экзамене не используется.